

Gruppenübung 8

Definitionen

Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum (z.B. der $\mathbb{R}^n$), und $|\cdot|$ die Betragsfunktion. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (*Vektor-*)*Norm* wenn gilt:

- a) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$ (Nichtnegativität).
- b) $\|v\| = 0$ genau dann wenn $v = 0$ (Positivität).
- c) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ (Homogenität).
- d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

Nun ist die Menge der quadratischen Matrizen mit reellen Einträgen $\mathbb{R}^{n \times n}$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension n^2 . D.h. das Konzept der Norm lässt sich ohne weiteres auf quadratische Matrizen übertragen. Nun hat $\mathbb{R}^{n \times n}$ noch eine natürliche Multiplikationsoperation (die Matrizenmultiplikation). Für Abschätzungen kann es nützlich sein die „Größe“ von AB mit der „Größe“ von A und B in einen Zusammenhang zu setzen. Wir nennen eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Matrizennorm*, wenn die Abbildung eine Norm ist und zusätzlich die folgende Bedingung erfüllt:

- e) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ (Submultiplikativität).

Aufgabe 1 Im folgenden diskutieren wir die sogenannte *induzierte Norm*. Sei dazu $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist $\|\cdot\|_{\text{ind}} : \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch

$$\|A\|_{\text{ind}} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

- a) Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

- b) Erklären Sie warum

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

gilt.

- c) Untersuchen Sie, ob die induzierte Norm die Submultiplikativität erfüllt.

Aufgabe 2 Sei $\|\cdot\|_{\infty} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto \|x\|_{\infty} := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

$\|\cdot\|_{\infty}$ ist die sogenannte *Maximum-* oder auch *l_{∞} -Norm*.

- a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\infty}$ eine Norm ist.
- b) Definieren Sie nun die l_{∞} -Norm für reelle quadratische Matrizen, d.h. definieren Sie für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Größe $\|A\|_{\infty}$. Berechnen Sie anschließend $\|M\|_{\infty}$ und $\|M^2\|_{\infty}$ für $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ist die so definierte l_{∞} -Norm eine Matrizennorm?

c) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definiere $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$A \mapsto n\|A\|_{\infty}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Matrizennorm ist.

Aufgabe 3 Wir betrachten die M - Δ -Struktur aus Abbildung 1, wobei

$$M(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

ist und $\|\Delta\|_{\infty} < 1$ ist.

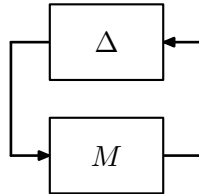


Abbildung 1: M- Δ -Struktur

- Zeichnen Sie das Bodediagramm von M und erklären Sie, warum der geschlossene Kreis nicht robust stabil ist.
- Finden Sie ein System Δ so dass der geschlossene Kreis nicht asymptotisch stabil ist.